

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

X. OSZTÁLY

1. Igazoljuk, hogy:

a) $\frac{x^2}{3} \geq 2x - 3$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén;

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, bármely $x, y \in (0, +\infty)$ esetén;

c) $\log_a 3 + \log_b 3 \geq 4 \log_{ab} 3$, bármely $a, b \in (1, +\infty)$ esetén;

d) Határozzuk meg az $a, b \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ számokat, ha $ab = 9$ és

$$\log_a (2a - 3) + \log_b (2b - 3) \geq \log_a 3 + \log_b 3$$

2. Egy atlétika versenyen az A, B, C középiskolák vesznek részt, minden iskola 3 tanulóval. Minden iskola végső pontszámát úgy számítják ki, hogy összeadják az illető iskola tanulóinak pontszámait.

A k -adikként beérkező versenyző $\frac{10}{k}$ pontot kap ($k = \overline{1,9}$). A verseny bírái a következő, egyidőben

teljesülő feltételeket tapasztalták:

a) Bármely két tanuló nem érkezett ugyan abban az időben.

b) Az első három helyezett különböző iskolába jár.

c) A C iskola tanulói egymás után értek célba.

d) A B iskola minden versenyzője előtt közvetlenül az A iskola egy-egy tanulója volt.

Mi a végső sorrend a három iskola pontszáma szerint?

3. Pálalá $P\%$ erősségű bort készít, és egy hordót P óra alatt tud megtölteni. Tándalá $T\%$ erősségű bort készít és ugyanazt a hordót T idő alatt tudja megtölteni. Együtt dolgozva 6 óra alatt töltik meg a hordót. Milyen erősségű lesz az így előállított bor?

4. Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ egy függvény, amelyre teljesül az

$$f(x+y) \geq f(x) \cdot f(y) \geq 2^{x+y} \text{ összefüggés, bármely } x, y \in \mathbb{R} \text{ esetén. Igazoljuk, hogy:}$$

a) $f(0) = 1$;

b) $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.